*Departamento de Matemática Aplicada a los Recursos Naturales*
E.T.S.I. de MONTES - U.P.M

**Primer Examen Parcial de Álgebra Lineal 9 de Febrero de 2007**

---

**Apellidos y Nombre:**

---

**N$^o$ de DNI o de carnet de Escuela:**

---

**Problema 1.** Señala la respuesta o respuestas correctas (todas las cuestiones puntúan lo mismo)

1. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U \subset V$.
   ☐ $U$ es siempre subespacio vectorial de $V$.
   ☐ Si $x + y \in U$ para todo $x, y \in U$, entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$.
   ☐ Si $x + y \in V$ para todo $x, y \in U$, entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$.
   ☐ Si $\alpha x + \beta y \in U$ para todo $x, y \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$.

2. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U, W$ subespacios de $V$.
   ☐ $U \cup W$ es un subespacio de $V$.
   ☐ $U \cap W$ es un subespacio de $V$.
   ☐ $U \cap (W \cup U)$ es un subespacio de $V$.
   ☐ $U + (W \cap U)$ es un subespacio de $V$.

3. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $U$ un subespacio de $V$ y $B$ una base de $U$.
   ☐ Existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $\overline{B} \subset B$.
   ☐ Existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $B \subset \overline{B}$.
   ☐ No existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $B \subset \overline{B}$.
   ☐ No existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $\overline{B} \subset B$.

4. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U$ y $W$ subespacios de $V$ con $U \cap W = \{0\}$
   ☐ $U \oplus W = V$.
   ☐ $U + W = V$.
   ☐ $U + W \subset V$.
   ☐ $U + W \subsetneq V$.

5. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n$.
   ☐ Cualquier conjunto de $n + 1$ vectores de $V$ es linealmente dependiente.

☐ Cualquier conjunto de $n-1$ vectores de $V$ no es sistema de generadores de $V$.
☐ Cualquier conjunto de $n-1$ vectores de $V$ no es base de $V$.
☐ Cualquier conjunto de $n+1$ vectores de $V$ no es base de $V$.

6. Sea $(V,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subset V$ un conjunto de $n$ vectores linealmente independientes.
☐ La dimensión de $V$ es $n$.
☐ La dimensión de $V$ es $m \geq n$.
☐ La dimensión de $V$ es $m > n$.
☐ La dimensión de $V$ es $m < n$.

7. Sean $V, W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal.
☐ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $y \in V, x \in W$.
☐ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x \in V,\ y \in W$.
☐ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in V$.
☐ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, para todo $x \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

8. Sean $V, W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal.
☐ Si $\operatorname{Im} f = W$, entonces $f$ es sobreyectiva.
☐ Si $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$, entonces $f$ es biyectiva.
☐ Si $\operatorname{Im} f = W$, entonces $\dim V \geq \dim W$.
☐ Si $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$, entonces $\dim V \leq \dim W$.

9. Sean $V, W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Si $B$ es una base de $V$ y $\overline{B}$ una base de $W$, entonces
☐ $f(B)$ es una base de $W$.
☐ $f(B) \subset \overline{B}$.
☐ $\overline{B} \subset f(B)$.
☐ $f(B)$ es un sistema de generadores de $W$.

10. Sean $V$ $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ una aplicación lineal.
☐ $f$ es inyectiva.
☐ Si $\operatorname{Im} f = V$, entonces $f$ es biyectiva.
☐ Si $\ker f = 0$, entonces $f$ es un isomorfismo.
☐ Si $f(B)$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces $f$ es un epimorfismo.

---

**Problema 2.** En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, referido a la base canónica, se consideran los vectores $v_1 = (1,2,3,4), v_2 = (1,1,2,3), v_3 = (2,-1,1,3), v_4 = (3,1,a,3), w = (9,1,b,12)$ , con $a,b \in \mathbb{R}$, y el subespacio vectorial $V = \mathcal{L}\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. Obtén los valores de $a$ y $b$ para los cuales:

a) [**2,5 Ptos.**] $w \notin V$.

b) [**2,5 Ptos.**] $w \in V$.

c) [**2,5 Ptos.**] $w \in \mathcal{L}\{v_1\} \oplus \mathcal{L}\{v_2\} \oplus \mathcal{L}\{v_3\} \oplus \mathcal{L}\{v_4\}$.

d) [**2,5 Ptos.**] $rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right) - rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & b \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}\right) = 0.$

**Problema 3.** Dada la familia de endomorfismos $f_{a,b} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dependiente de dos parámetros reales $a$ y $b$, definida, en la base canónica, por

$$f_{a,b}(x,y,z,t) = ((ab-1)x + (ab-a-1)y + (-ab+a+1)z, (ab-b-1)x + (ab-1)y +$$

$$(-ab+b+1)z, (ab-b-1)x + (ab-a-1)y + (-ab+a+b+1)z, -bx+bz).$$

a) [**3 Ptos.**] Calcula razonadamente la matriz $A$ de $f$ en la base $B = \{(1,0,1,0), (1,1,1,0), (0,1,1,1), (0,0,0,1)\}$.

b) [**3 Ptos.**] Estudia el rango de $f$ en función de los parámetros $a$ y $b$ y representa los resultados obtenidos en un plano paramétrico $(a,b)$, es decir un plano en el que las abscisas representan el parámetro $a$ y las ordenadas el parámetro $b$.

c) [**2 Ptos.**] Obtén razonadamente Ker $f$ e Im $f$ para el caso $a = b = 1$.

d) [**2 Ptos.**] Calcula un suplementario de Im $f$+ Ker $f$, para el mismo caso $a = b = 1$.

**Problema 4.** Una empresa se dedica a la impregnación de apeas de mina con un compuesto fungicida e insecticida, que se realiza de tres formas.
La primera con una máquina cuyo grupo de presión consume gasoil a razón de 1 litro por metro cúbico de madera tratada, y un consumo de 15 litros de producto por metro cúbico de madera tratada.
La segunda se realiza con un autoclave de bomba eléctrica que consume 1 Kilowatio por metro cúbico de madera tratada y un gasto de producto de 10 litros por metro

cúbico de madera tratada.
La tercera se realiza manualmente con impregnación a razón de 12 litros de producto por metro cúbico de madera tratada, y un consumo de 1 jornada laboral por metro cúbico de madera tratada.
Sabiendo que se pueden consumir, como máximo, 8 litros de gasoil, 12 kilowatios de electricidad, 10 jornadas de mano de obra y 300 litros de producto protector, calcula los metros cúbicos de madera a tratar por cada uno de los tres procedimientos para maximizar los metros cúbicos totales de madera tratada, e interpreta los resultados.

---

- Cada ejercicio debe responderse en hojas separadas.
- Se acompañarán los cálculos efectuados para resolver cada problema.
- No está permitido el uso de libros, apuntes, calculadoras o móviles.
- El examen deberá efectuarse en un tiempo máximo de **3 horas**.
- Las notas serán publicadas el lunes 19 de Febrero de 2007.
- Una solución será publicada, una vez celebrado el examen, en las direcciones:

  ftp://matematicas6.montes.upm.es

  http://matematicas.montes.upm.es/jmperez/jmperez.html

**Una solución al examen**

---

## Problema 1.

1. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U \subset V$.
   ☐ $U$ es siempre subespacio vectorial de $V$.
   ☐ Si $x + y \in U$ para todo $x, y \in U$, entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$.
   ☐ Si $x + y \in V$ para todo $x, y \in U$, entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$.
   ☒ Si $\alpha x + \beta y \in U$, para todo $x, y \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces $U$ es subespacio vectorial de $V$.

2. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U, W$ subespacios de $V$.
   ☐ $U \cup W$ es un subespacio de $V$.
   ☒ $U \cap W$ es un subespacio de $V$.
   ☒ $U \cap (W \cup U)$ es un subespacio de $V$.
   ☒ $U + (W \cap U)$ es un subespacio de $V$.

3. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $U$ un subespacio de $V$ y $B$ una base de $U$.
   ☐ Existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $\overline{B} \subset B$.
   ☒ Existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $B \subset \overline{B}$.
   ☐ No existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $B \subset \overline{B}$.
   ☐ No existe $\overline{B}$ base de $V$ tal que $\overline{B} \subset B$.

4. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $U$ y $W$ subespacios de $V$ con $U \cap W = \{0\}$
   ☐ $U \oplus W = V$.
   ☐ $U + W = V$.
   ☒ $U + W \subset V$.
   ☐ $U + W \subsetneq V$.

5. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n$.
   ☒ Cualquier conjunto de $n + 1$ vectores de $V$ es linealmente dependiente.
   ☒ Cualquier conjunto de $n - 1$ vectores de $V$ no es sistema de generadores de $V$.
   ☒ Cualquier conjunto de $n - 1$ vectores de $V$ no es base de $V$.
   ☒ Cualquier conjunto de $n + 1$ vectores de $V$ no es base de $V$.

6. Sea $(V, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subset V$ un conjunto de $n$ vectores linealmente independientes.

☐ La dimensión de $V$ es $n$.
☒ La dimensión de $V$ es $m \geq n$.
☐ La dimensión de $V$ es $m > n$.
☐ La dimensión de $V$ es $m < n$.

7. Sean $V, W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal.
☐ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $y \in V, x \in W$.
☐ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x \in V,\ y \in W$.
☒ $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in V$.
☒ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, para todo $x \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

8. Sean $V, W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal.
☒ Si $\operatorname{Im} f = W$, entonces $f$ es sobreyectiva.
☐ Si $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$, entonces $f$ es biyectiva.
☒ Si $\operatorname{Im} f = W$, entonces $\dim V \geq \dim W$.
☒ Si $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim V$, entonces $\dim V \leq \dim W$.

9. Sean $V, W$ $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ una aplicación lineal. Si $B$ es una base de $V$ y $\overline{B}$ una base de $W$, entonces
☐ $f(B)$ es una base de $W$.
☐ $f(B) \subset \overline{B}$.
☐ $\overline{B} \subset f(B)$.
☐ $f(B)$ es un sistema de generadores de $W$.

10. Sean $V$ $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f : V \to V$ una aplicación lineal.
☐ $f$ es inyectiva.
☒ Si $\operatorname{Im} f = V$, entonces $f$ es biyectiva.
☒ Si $\ker f = 0$, entonces $f$ es un isomorfismo.
☐ Si $f(B)$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces $f$ es un epimorfismo.

**Problema 2.**

Planteando $x(1,2,3,4) + y(1,1,2,3) + z(2,-1,1,3) + t(3,1,a,3) = (9,1,b,12)$ , se llega al sistema lineal $[S]$

$$\left.\begin{array}{rcl} x + y + 2z + 3t & = & 9 \\ 2x + y - z + t & = & 1 \\ 3x + 2y + z + at & = & b \\ 4x + 3y + 3z + 3t & = & 12 \end{array}\right\} [S]$$

que puede ser resuelto por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & b \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & \boxed{-1} & -5 & -5 & -17 \\ 0 & -1 & -5 & a-9 & b-27 \\ 0 & -1 & -5 & -9 & -24 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & b-10 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & b-10 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7a-4b+12 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

1) $w \notin V \Longleftrightarrow [S]$ es incompatible $\Longleftrightarrow 7a - 4b + 12 \neq 0$ .

2) $w \in V \Longleftrightarrow [S]$ es compatible $\Longleftrightarrow 7a - 4b + 12 = 0$ .

3) $w \in \mathcal{L}\{v_1\} \oplus \mathcal{L}\{v_2\} \oplus \mathcal{L}\{v_3\} \oplus \mathcal{L}\{v_4\} \Longleftrightarrow [S]$ es compatible determinado. Dado que, en ningún caso, $[S]$ es compatible determinado, no existen valores de $a, b$ para los cuales se satisface esta tercera condición.

4) $rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\right) - rg\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & a & b \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}\right) = 0 \Longleftrightarrow 7a - 4b + 12 = 0$ .

**Problema 3.**

Recordamos que *un endomorfismo $f$ está completamente determinado si se conocen los transformados mediante $f$ de los vectores de una base $B$. Precisamente, la matriz $A$ del endomorfismo $f$ en la base $B$, $A = M(f, B)$, tiene como vectores columna los transformados mediante $f$ de los vectores de la base $B$, expresados mediante sus coordenadas en la propia base $B$.*

Recordamos, también, que *las matrices de un endomorfismo $f$ en sendas bases $B$ y $B'$, $A$ y $A'$ respectivamente, verifican una relación de semejanza $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ siendo $P$ la matriz de paso de la base $B$ a la base $B'$, es decir la matriz que tiene como vectores columnas los vectores de la base $B'$ expresados mediante sus coordenadas en la base $B$, por lo que cualquier matriz de paso $P$ es regular y admite inversa $P^{-1}$.*

De la definición dada para $f_{a,b}$ se pueden obtener con facilidad los transformados de los vectores de la base canónica $B_c = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$, expresados en la propia base canónica:

$$\begin{cases} f_{a,b}(1,0,0,0) = (ab-1, ab-b-1, ab-b-1, -b), \\ f_{a,b}(0,1,0,0) = (ab-a-1, ab-1, ab-a-1, 0), \\ f_{a,b}(0,0,1,0) = (-ab+a+1, -ab+b+1, -ab+a+b+1, b), \\ f_{a,b}(0,0,0,1) = (0,0,0,0), \end{cases}$$

y la matriz de $f$ en la base canónica es

$$A = M(f, B_c) = \begin{bmatrix} ab-1 & ab-a-1 & -ab+a+1 & 0 \\ ab-b-1 & ab-1 & -ab+b+1 & 0 \\ ab-b-1 & ab-a-1 & -ab+a+b+1 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de paso de la base canónica $B_c$ a la base $B = \{(1,0,1,0), (1,1,1,0), (0,1,1,1), (0,0,0,1)\}$ es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos la inversa de la matriz $P$, $P^{-1}$, por operaciones elementales sobre las filas mediante el algoritmo $P|I \longrightarrow I|P^{-1}$:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{cases} f_1' = f_1 \\ f_2' = f_2 \\ f_3' = f_3 - f_1 \\ f_4' = f_4 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} f_1' = f_1 \\ f_2' = f_2 \\ f_3' = f_3 \\ f_4' = f_4 - f_3 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1' = f_1 \\ f_2' = f_2 - f_3 \\ f_3' = f_3 \\ f_4' = f_4 \end{array}\right. \longrightarrow \quad \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1' = f_1 - f_2 \\ f_2' = f_2 \\ f_3' = f_3 \\ f_4' = f_4 \end{array}\right. \longrightarrow \quad \begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

y

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, obtenemos la matriz $A'$ de $f$ en la base $B$:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ab-1 & ab-a-1 & -ab+a+1 & 0 \\ ab-b-1 & ab-1 & -ab+b+1 & 0 \\ ab-b-1 & ab-a-1 & -ab+a+b+1 & 0 \\ -b & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ab-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Recordamos que *todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo $f$, en las distintas bases, tienen el mismo rango, precisamente el rango del endomorfismo $f$ (al existir entre ellas una relación de semejanza y ser las matrices $P$ y $P^{-1}$ regulares también desde el punto de vista matricial está justificado).*

Por sencillez, partiremos para el análisis de la matriz diagonal $A'$ obtenida para $f$ en la base $B$. De otro modo, podríamos analizarlo por triangulación gaussiana de la matriz $A$ de $f$ en otra base cualquiera.

Hacemos el análisis a partir de los elementos $a, ab-1, b$.

$$\begin{cases} \text{Si } a=b=0: & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 1, \\ \text{si } a=0, b\neq 0: & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 2, \\ \text{si } a\neq 0, b=0: & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 2, \\ \text{si } ab-1=0: & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 2, \\ \text{si } a\neq 0, b\neq 0, ab-1\neq 0: & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 3. \end{cases}$$

En un plano paramétrico $(a, b)$, podemos resumir

$$\begin{cases} \text{En el origen de coordenadas:} & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 1, \\ \quad\text{en los ejes (salvo el origen) y} & \\ \text{en la hipérbola equilátera } ab-1=0: & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 2, \\ \text{en cualquier otro punto del plano:} & \text{rg } A' = \text{ rg } f = 3. \end{cases}$$

Estos resultados se expresan gráficamente en la Figura 1.

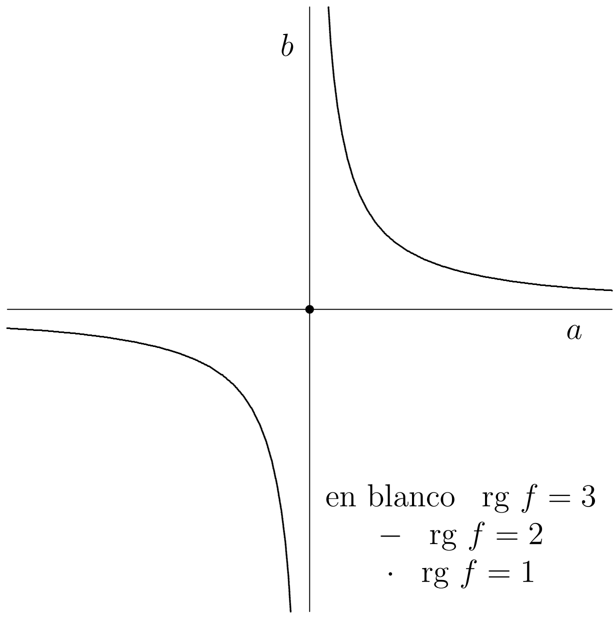


Figura 1: Plano paramétrico $(a, b)$

c) Recordamos que *imagen de cualquier aplicación lineal $f$ es el subespacio, del espacio final, de los transformados mediante $f$ de todos los vectores del espacio inicial* y *núcleo de cualquier aplicación lineal $f$ es el subespacio, del espacio inicial, de todos los vectores cuyo transformado mediante $f$ es el vector nulo del espacio final.*

Presentamos dos alternativas de resolución:

<u>alternativa: a partir de la matriz de $f$ en la base canónica $B_c$</u>

Si disponemos los vectores de la base $B_c$ por columnas en la parte inferior y en la parte superior sus respectivos transformados mediante $f_{1,1}$ y efectuamos operaciones elementales por columnas que produzcan una triangulación gaussiana en la parte superior, los vectores no nulos que resulten en la parte superior constituirán una base de Im $f_{1,1}$, mientras que los vectores de la parte inferior cuyos transformados mediante $f_{1,1}$ en la parte superior sean el nulo, constituirán una base de ker $f_{1,1}$:

$$
\begin{array}{cccc}
0 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & -1 & 2 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 \\
-- & -- & -- & -- \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} c_1' = c_1 \\ c_2' = c_2 \\ c_3' = c_3 + c_1 + c_2 \\ c_4' = c_4 \end{array}\right. \\
\qquad\qquad \longrightarrow \\
\\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{cccc}
0 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
-- & -- & -- & -- \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

y

$$B_{\ker f_{1,1}} = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}, \quad B_{\mathrm{Im}\ f_{1,1}} = \{(1,0,1,0),(0,1,1,1)\}.$$

Los vectores de ambas bases están expresados mediante sus coordenadas en la base canónica.

<u>alternativa: a partir de la matriz de $f$ en la base $B$</u>

La matriz asociada a $f_{1,1}$ en la base $B$ es

$$A' = M(f_{1,1}, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando el mismo algoritmo que en la alternativa anterior

$$\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-- & -- & -- & -- \\
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

y

$$B'_{\ker f_{1,1}} = \{(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}, \ \ B'_{\mathrm{Im}\ f_{1,1}} = \{(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}.$$

Los vectores de ambas bases están expresados mediante sus coordenadas en la base $B$.

d) Sabemos que *si* $S \neq \{\vec{0}\}$ *es un subespacio del espacio vectorial* $E$ *y* $S' \neq \{\vec{0}\}$ *es otro subespacio de* $E$ *tal que* $S \bigoplus S' = E$*, entonces* $S' = \overline{S}$ *es un suplementario propio de* $S$. En general, si $\dim S < \dim E$ existe infinitos suplementarios de $S$; si $\dim S = \dim E$ no existe ningún suplementario propio de $S$. El conjunto $\{\vec{0}\}$ sería el suplementario impropio de $S$.

También aquí presentamos dos alternativas:

alternativa: a partir de los vectores de las bases $B_{\ker f_{1,1}}$, $B_{\mathrm{Im}\ f_{1,1}}$ del apartado anterior.

Recordemos que trabajamos en la base canónica.

Obtenemos una base del subespacio $\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1}$ por triangulación gaussiana del sistema de vectores formado por una base de $\mathrm{Im}\ f_{1,1}$ y de $\ker f_{1,1}$. Disponemos los vectores de base por filas y efectuamos operaciones elementales sobre las filas:

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\ \begin{cases} f_1' = f_1 \\ f_2' = f_3 - f_1 \\ f_3' = f_4 \\ f_4' = f_2 \end{cases} \!\!\!\longrightarrow
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\ \begin{cases} f_1' = f_1 \\ f_2' = f_2 \\ f_3' = f_3 + f_2 \\ f_4' = f_4 \end{cases} \!\!\!\longrightarrow
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Luego, $\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1} = \mathbb{R}^4$ y no existe suplementario propio $\overline{\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1}}$.

El suplementario impropio es $\overline{\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1}} = \{\vec{0}\}$.

alternativa: a partir de los vectores de las bases $B'_{\ker f_{1,1}}$, $B'_{\mathrm{Im}\ f_{1,1}}$ del apartado anterior.

Recordemos que trabajamos en la base $B$.

Es evidente que $\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1} = \mathbb{R}^4$. Por tanto no existe suplementario propio de $\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1}$ en $\mathbb{R}^4$ y su suplementario impropio es $\overline{\mathrm{Im}\ f_{1,1} + \ker f_{1,1}} = \{\vec{0}\}$.

## Ejercicio 4

Variables:
x: $m^3$ de madera tratados en máquina de gasoil
y: $m^3$ de madera tratados en máquina eléctrica
z: $m^3$ de madera tratados a mano

Restricciones:

| | |
|---|---|
| $x \le 8$ | Gasoil |
| $y \le 12$ | Kw. Eléctricos. |
| $z \le 10$ | Mano de obra. |
| $15x + 10y + 12z \le 300$ | Producto protector. |
| $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ | |

Función objetivo a maximizar:
$x + y + z = m^3$ de madera tratados

Tablas de Simplex:

| x | y | z | h1 | h2 | h3 | h4 | b | cocientes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 | 10 |
| 15 | 10 | 12 | 0 | 0 | 0 | 1 | 300 | 25 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

| x | y | z | h1 | h2 | h3 | h4 | b | cocientes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 | 12 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 | |
| 15 | 10 | 0 | 0 | 0 | -12 | 1 | 180 | 18 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -10 | |

| x | y | z | h1 | h2 | h3 | h4 | b | cocientes |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 | 8 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 | |
| 15 | 0 | 0 | 0 | -10 | -12 | 1 | 60 | 4 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | -22 | |

| x | y | z | h1 | h2 | h3 | h4 | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 2/3 | 4/5 | -1/15 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | - 2/3 | - 4/5 | 1/15 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | - 1/3 | - 1/5 | -1/15 | -26 |

Solución: $x = 4$ $y = 12$ $z = 10$

total = 26 $m^3$ tratados (Valor máximo)
Recursos consumidos:

- > 4 litros de gasoil y sobran 4 litros.
- > 12 Kw eléctricos consumidos.
- > 10 jornadas de Mano de obra dedicadas.
- > 300 litros de producto protector consumidos.